ISSN 1677-7883

O testemunho como prova e suas relações com o conhecimento, a certeza e a dúvida na matemática[1]

Testimony as evidence and its relations with knowledge, certainty and doubt in mathematics

André Campos da Rocha*

Resumo: O objetivo deste artigo é apresentar um argumento que corrobore o papel do testemunho na epistemologia da matemática. A hipótese com a qual se trabalha é a de que qualquer que seja o tipo de conhecimento que se examine, o testemunho estará presente como uma das fontes de prova. Desse modo, não resta dúvida de que na matemática essa realidade não se altera. O método utilizado foi o de análise, portanto, discutem-se argumentos que tornam clara a questão em jogo. O que se alcançou foi a construção de um argumento a ser utilizado para reforçar a importância do testemunho na constituição da prova. Esse resultado demonstra que pode-se esboçar uma epistemologia da matemática que ainda está por vir e que encare a prova para além de seus limites lógicos.

Palavras-chave: Conhecimento. Testemunho. Epistemologia Social. Matemática. Prova.

[1] Este artigo é fruto de estágio de pós-doutoramento realizado no Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). A natureza interdisciplinar do programa foi fundamental para a realização da minha pesquisa. Durante o estágio, estive sob a supervisão do Professor Titular Ricardo Kubrusly, a quem agradeço. O trabalho não teria sido realizado sem o apoio financeiro da CAPES, por meio de bolsa do Programa Nacional de Pós-doutorado (PNPD/CAPES).

* André Campos da Rocha é doutor em Filosofia pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e professor da Faculdade de São Bento do Rio de Janeiro. E-mail: monodromia@gmail.com

Abstract: The purpose of this paper is to present an argument that corroborates the role of testimony in the epistemology of mathematics. The hypothesis with which one works is that whatever kind of knowledge is examined, the testimony will be present as one of the sources of proof. In this way, there is no doubt that in mathematics this reality does not change. The method used was that of analysis, so arguments are discussed that make the issue clear. What was achieved was the construction of an argument to be used to reinforce the importance of testimony in the constitution of evidence. This result demonstrates that one can sketch an epistemology of mathematics that is yet to come and that faces the test beyond its logical limits.

Keywords: Knowledge. Testimony. Social Epistemology. Mathematics. Evidence.

Introdução

O objetivo restrito que este trabalho persegue é modesto. Ele procura ampliar a compreensão da inclusão do testemunho como fonte epistêmica probatória no conhecimento matemático. Para realizar tal empreendimento, utilizaram-se as condições que estruturam o argumento que G. E. Moore apresentou para provar a existência do mundo exterior. A partir de Moore, foi abordado o problema da prova para o conhecimento matemático, com a intenção de se apontar a relevância do testemunho para ela e os limites da compreensão de uma verdade matemática.

O artigo procurou argumentar, ao lado de Coady, que a concepção mais geral de que o conhecimento matemático apenas se alcança *a priori*, por intuição ou pela compreensão de uma prova, não se sustenta. O filósofo australiano defende que os argumentos que se alinham a essa posição tradicional e dominante podem ser desarmados e o testemunho deve ser incluído nesse sistema.

Os valores que sustentam a avaliação epistêmica são: a) as crenças verdadeiras; b) o afastamento dos erros; c) a manutenção de crenças justificadas; d) a conservação de crenças racionais; e) a posse de conhecimento. A epistemologia tradicional, para conseguir viabilizar a avaliação epistêmica, afirma que apenas o indivíduo pode operar esses valores acima declinados. Portanto, uma prova só poderia se construir na esfera individual. O testemunho, em contrapartida, pode ser definido como uma prova social, a qual se constitui por meio de registros do passado, conhecimento compartilhado por um especialista (ou um grupo deles) e deferência a uma autoridade confiável. Desse modo, o papel que este trabalho dá para o testemunho é o de obtenção e sustentação do conhecimento ou de crença confiável. Aqui, segue-se a opinião de Coady, ao afirmar que: "o testemunho é muito importante na formação de muito do que normalmente consideramos uma crença razoável e que nossa dependência dele é extensa" (COADY, 1992, p. 7).

Numa perspectiva mais geral, o objetivo do texto consite em questionar fronteiras que são estabelecidas entre o conhecimento matemático e as certezas e dúvidas que dele emergem[2]. Do ponto de vista aqui adotado, as certezas da matemática garantem a existência de dúvidas que participam da sua própria conformação.

Na primeira seção do artigo, há uma breve reflexão sobre o tratamento que aqui defende-se como o mais eficaz para pensar as questões epistemológicas oriundas da matemática. Já na segunda seção, discute-se a natureza da prova e seu papel nas descobertas que se atrelam ao conhecimento matemático. Na terceira parte, faz-se uma análise das condições do argumento que Moore apresentou para provar a existência do mundo exterior. Depois disso, elas são aplicadas a outro objetivo, que é o de aumentar a compreensibilidade do papel do testeumnho na matemática. Na quarta seção, são esclarecidas as razões que levaram este trabalho a aderir metodologicamente uma agenda concordante com a epistemologia social, além de se caracterizá-la minimamente. Também nessa parte do trabalho, expõe-se o argumento que pretende reforçar a ideia de que o testemunho é um dos fundamentos das verdades matemáticas.

1. Conhecimento matemático: explicar ou compreender?

Quando esquadrinha-se as reflexões sobre a matemática, facilmente são detectadas tensões a respeito de quais bases teóricas e metodológicas seriam as mais adequadas para conduzi-las. Alguns problemas daí advindos são: a) deve-se optar por uma orientação que leve em conta fatores culturais e intelectuais?; b) a melhor escolha seria a dos estudos em cognição?; c) o descortinamento de enigmas epistemológicos é suficiente para determinar o que vem a ser a matemática?

[2] Em verdade, este artigo é produto de um projeto de pesquisa maior, que se desenvolveu no contexto de atividades pós-doutorais.

Essas questões acima mencionadas, são originadas por outras anteriores. Raymond S. Nickerson fornece, no início de seu livro, um bem formulado inventário delas:

> O que é matemática? É a "rainha das ciências", como, graças a Carl Frederich Gauss, muitas vezes é chamada? Ou é a "criação mais original do espírito humano", como Alfred North Whitehead sugere (1956, p.402)? Ou mais prosaicamente, é aquilo, como George Polya diz ser para muitos estudantes: "um conjunto de regras rígidas, algumas das quais você deve aprender de cor antes dos exames finais e esquecer tudo depois" (1954b, p.115)? É a única área de conhecimento em que a verdade absoluta é possível? Ou é "fundamentalmente uma empresa humana decorrente de atividades humanas" (Lakoff & Núñez, 2000, p.351) e, portanto, "uma atividade necessariamente imperfeita e revisável" (Dehaene, 1997, p.247)? As verdades da matemática existem de forma independente das mentes que as descobrem ou são invenções humanas? Eles são atemporais e independentes da cultura? Ou elas repousam em suposições que podem se alterar, dependendo do tempo e do lugar? A matemática e a lógica são a mesma coisa? A matemática se origina da lógica ou a lógica da matemática? Ou é o caso, como argumenta Polkinghorne, que "a verdade matemática excede a prova de teoremas e escapa a uma captura total das malhas de confinamento de qualquer rede lógica"? (1998, p.127). A matemática é, como Bertrand Russell famosamente disse: "o assunto em que nunca sabemos o que estamos falando, nem se o que estamos dizendo é verdade "(1901/1956a, p. 1576)? (NICKERSON, 2011, p. 1).

Certamente, esses questionamentos revelam duas realidades. A primeira, é que há uma luta, que consumiu os debates no século passado, entre uma concepção apriorística do conhecimento matemático e um certo empirismo. A outra, é que estudos sobre esse campo de saber tendem a ser ou de natureza *compreensiva* ou *explicativa*.

Da bifurcação acima mencionada, tem-se que as várias disciplinas[3] que se ocupam apartadamente de falar *sobre* a matemática possuem motivações distintas e encontram-se em estágios descompassados de desenvolvimento em suas investigações. Os resultados de pesquisa, obtidos e acumulados isolada-

[3] Já faz quase meio século que existe um acalorado debate a respeito das eventuais fronteiras entre os saberes. A palavra disciplina, segundo os teóricos da interdisciplinarida e da transdisciplinaridade, é uma expressão que se encontra desgastada pelo tempo e uso. Este texto tende a seguir essa linha teórica, que vê nas disciplinas uma limitação artificial.

mente, em áreas como a história, psicologia ou a antropologia da matemática, são parcamente relacionados e torna-se uma tarefa ingente encontar pontos de contato entre essas múltiplas abordagens, dado o hiato que se criou entre elas. Entre os trabalhos significativos, é possível encontrar declarações que corroboram esse estado de coisas. Em seu clássico livro sobre psicologia da invenção na matemática, Jacques Hadamard diz que:

> Não me arrisquei a dizer nada sobre as influências sociais e históricas que certamente atuam sobre as invenções, tais como elas fazem em qualquer área. Não sei muito sobre o mecanismo dessa influência. A questão é saber se alguém se ocupa disso (1954, p. 134).

Embora vários autores compartilhem da ideia de que "a matemática é um exemplo límpido de conhecimento humano, um assunto que pode ser usado como um padrão contra o qual reivindicações de conhecimento em outras áreas podem ser medidas" (KITCHER, 1984, p. 3), iniciativas de se tentar estabelecer algum tipo de interesse comum, além desse, na investigação do conhecimento matemático, são raras. Desse modo, o que psicólogos, historiadores, filósofos, cientistas da computação e cientistas cognitivos descobriram ou formularam sobre a matemática, encontra-se quase que completamente desarticulado. Por exemplo, o mecanismo biológico, denominado pelos estudos na área de cognição, de *transmissão cultural* (TOMASELLO, 1999, p. 4), talvez pudesse iluminar aspectos asbtrusos que são encontrados em sociologia e filosofia da matemática.

Uma louvável mobilização no sentido de estabelecer nexos entre diversos modos de pensar a matemática, encontra-se na coletânea organizada por Reuben Hersh[4]. Esse matemático e autor de livros de divulgação científica revela a surpreendente origem do livro que editou:

> Este livro vem da Internet. Navegando pela *web*, topei com filósofos, cientistas cognitivos, sociólogos, cientistas da computação e, até mesmo, matemáticos! – revelando coisas originais e provocativas sobre matemática. E muitas dessas pessoas provavelmente nunca tinham ouvido falar umas das outras! Então as reuni aqui. Desta forma, elas podem ler o trabalho umas das outras (HERSH, 2006, p. vii).

[4] Cf. HERSH, R. (ed.) *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*. New York: Springer, 2006.

Parece um escândalo que uma obra com tamanha envergadura tenha se articulado *par hasard* e não segundo um esforço deliberado de pesquisadores ocupados com questões sobre a natureza da matemática.

Essa espécie de *patologia do saber*[5], ou obsessão por sitiar saberes, acaba por conduzir as pesquisas em torno da matemática através de distinções radicais, que impedem a mescla frutuosa de orientações teóricas que poderiam se complementar. A visão que opera o conhecimento de forma compartimentada encontra-se em crise e precisa ser superada. Segundo Japiassu:

> O modo de pensamento ou de conhecimento fragmentado, monodisciplinar e simplesmente quantificados, tomando como critério de construção o ponto de vista (o pradigma) de uma ramo do saber autodeterminado ou disciplina, com todos os seus interesses subjacentes, é responsável pela prevalência de uma inteligência bastante míope ou cega na medida em que é sacrificada a aptidão humana normal de religar os conhecimentos em proveito da capacidade (também normal) de separar ou desconectar (2006, p. 15).

Numa perspectiva tradicional, as investigações disciplinares sobre a matemática se organizam em dois grandes grupos:

a) empreendimentos que procuram *explicar* a natureza da matemática, através do observacional e de algum meio de quantificação;

b) investimentos teóricos que se encarregam de *compreender* as significações intencionais da atividade matemática, por meio da normatividade.

No extremo da posição "a)", estão os posicionamentos que se alinham ao de Karl Mannheim, em *Ideologia e Utopia*: "campos muito especiais do conhecimento como a Matemática (...) refere-se apenas a uma dimensão específica da existência, que não basta para seres humanos que busquem compreender e moldar o seu mundo" (1976, p. 29) e, no extremo de "b)", são encontradas afirmações como a de Mark Colyvan, que defende o fato de que:

> A matemática ocupa uma posição única e privilegiada no conjunto das investigações operadas pelos humanos. Ela é a ciência mais rigorosa e a que fornece mais certezas de todas as ciências; desempenha um papel fundamental na maioria dos trabalhos científicos, se não em todos. É por tais razões que o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) afirmou que a matemática é a rainha das ciências (2006, p. 1).

[5] Expressão cunhada por Hilton Japiassu.

Mesmo que se tenha certa dificuldade em dar assentimento a algo que parece tão exagerado, como as posições de Mannheim ou Colyvan, não há como negar que, devido a uma série de questões desconcertantes que o conhecimento matemático suscita, teorias epistemológicas sérias se veem obrigadas a considerá-lo. Quando acontece de se optar por eliminar as verdades matemáticas do universo das discussões epistemológicas, as razões são fundadas em valores, como é o caso de Mannheim.

Neste artigo, utiliza-se a epistemologia social – considerada um autêntico e recente ramo da filosofia – como ferramenta teórica para abordar o conhecimento matemático. Ela será empregada como uma metadisciplina que conduzirá o exercício reflexivo aqui presente. E tal reflexão, se articula com a definição que Gilles-Gaston Granger nos fornece, quando assevera que:

> O pensamento filosófico é reflexivo, pelo fato de ele se aplicar não diretamente a fatos, mas atos de representação. Mas ele não é exploração de uma subjetividade inteiramente constituída. O caráter reflexivo da filosofia deve ser aproximado da noção de "aquilo que reflete" em Kant, como caso particular (2013, p. 25).

Esse modelo teórico, ou seja, da epistemologia social, mesmo que de natureza filosófica, se configura como um intermediário entre a *explicação* (descritiva e contingente) e a *compreensão* (normativa e necessária). Não é supérfluo acentuar, que essa vertente epistemológica de que este trabalho se serve, não é um subcaso da sociologia do conhecimento, porquanto não se estabeleça em bases empíricas. No entanto, as tematizações que ela permite (organização social do trabalho cognitivo, condições sociais do conhecimento individual, distribuição epistêmica ideal, condições sociais no conhecimento individual etc) inauguram uma modalidade de investigação que se mostra mais amigável com a interdisciplinaridade do que todas as outras abordagens que geralmente encontra-se. E resta claro que há necessidade de se pensar a matemática segundo uma concepção mínima interdisciplinar, caso queira-se avançar na solução dos problemas que ela suscita.

2. A prova como o núcleo da matemática

Toda atividade de caráter científico ou tecnológico se articula a partir de consensos, os quais são considerados como *estruturantes* de tais empreendimentos[6]. Isso se dá tanto na sociologia quanto na biologia; na matemática ou na oceanografia também encontramos esse padrão. É certo, também, que dependendo da área de conhecimento – se é que ainda pode-se operar com fronteiras claras entre saberes – os consensos são em maior ou menor número e grau, mas estão sempre presentes. Diz-se que tais consensos, quando submetidos a exame que os suprimem ou dão entrada a outros, caracteriza uma "crise de fundamentos" de uma determinada área. Na literatura de história e filosofia da ciência, pode-se recolher inúmeros exemplos de "guerras intestinas" na física, na matemática, nas engenharias ou na medicina, que se iniciaram por conta de debates que visam questionar os fundamentos que dão certa unidade a um campo de saber. Especificamente, na matemática, Jairo José da Silva, nos diz:

> Como toda comunidade científica, a dos matemáticos assenta suas práticas em pressupostos universalmente aceitos, em geral não questionados até que eventuais problemas obriguem-na a revê-los e de algum modo corrigi-los. Até que uma crise se instale, pressupõe-se tacitamente que as bases do edifício matemático sejam sólidas (2007, p. 27).

Um vigoroso consenso na atividade matemática, que facilmente identifica-se, é o de que a prova constitui o seu núcleo duro. Segundo Krantz:

> Embora seja seguro dizer que a maioria dos matemáticos não gastam a maior parte do seu tempo provando teoremas, podemos afirmar que a *prova* é a *lingua franca* da matemática. Ela é a rede que mantém unidos todos os empreendimentos da matemática . É o que faz a área sobreviver e garante que a matemática contenha idéias que terão alguma longevidade (2011, p. 3).

A matemática é caracterizada de diversas formas. Entretanto, duas tendências epistemológicas básicas e opostas, podem ser mapeadas tal como Poincaré o fez. Segundo o matemático francês:

> É impossível estudar as obras dos grandes matemáticos, e mesmo as dos pequenos, sem notar e sem distinguir duas tendências opostas, ou antes, dois

[6] A noção de consenso que utilizo, pretende sintetizar conceitos em história e filosofia da ciência que são notórios e fartamente discutidos. Essa opção terminológica tem o objetivo de me livrar do compromisso de assumir termos, tais como "falseacionismo" e "paradigma", que me levariam a territórios que não tenho pretensão de alcançar com este trabalho.

> tipos de espíritos inteiramente diferentes. Uns estão, antes de tudo, preocupados com a lógica (...). Outros se deixam guiar pela intuição, e na primeira investida fazem conquistas rápidas, mas algumas vezes precárias, como se fossem ousados cavaleiros na linha de frente (POINCARÉ, 1995, p. 13).

Dessa constatação, emerge um extenso quadro de reflexões filosóficas sobre a natureza da matemática. Todas elas empenham seus esforços no sentido de "determinar, entre outras coisas, quais as suposições e as ideias que servem de fundamentos para as verdades matemáticas" (COSTA, 2008, p. 13). É possível fazer uma cartografia das teorias sobre o conhecimento matemático, determinando aquelas que se vinculam a figuras de destaque na historiografia filosófica (Platão, Aristóteles, Leibniz, Kant, Husserl, etc.) ou aos modos de pensar que criaram grupos ou escolas de pensamento (intuicionismo, logicismo e formalismo). Não importando muito se leva-se em consideração a afirmação kantiana de que as verdades matemáticas são sintéticas e *a priori* ou, por outro lado, se há concordância com o projeto formalista, que pretendia transformar o método axiomático na essência da matemática, o que há em comum entre essas formas filosóficas de encarar a matemática é que uma verdade de natureza matemática deve ser autenticada por uma prova que a sustente. Aliás, como Lakatos afirma, "o cerne da Matemática é a experiência mental – a prova" (LAKATOS, 1978, p. 74). E uma boa descrição do que vem a ser uma prova encontra-se em Steven G. Krantz:

> Uma *prova* na matemática é um dispositivo psicológico para convencer alguém, ou algum público, de que uma certa proposição matemática é verdadeira. A estrutura e a linguagem utilizadas, na formulação dessa prova, serão produto da pessoa que a criou; mas também devem ser adaptadas ao público que a receberá e avaliará. Assim, não há nenhuma prova, de qualquer resultado, que seja "única" ou "certa" ou "melhor". Uma prova faz parte de uma ética situacional: situações se alteram, valores e padrões matemáticos se desenvolvem e evoluem, e assim a própria *maneira* como a matemática é feita se altera e cresce (2011, p. vii).

Outro aspecto da prova, que deve-se salientar, é o fato de que ela promete mais do que realiza. Embora a prova deva ser encarada como um argumento cogente, ela carrega em si um teor de retórica eficaz. Nem sempre ela é um argumento tão rigoroso como aqueles que a lógica tanto preza, pois em alguns casos tem-se mais uma estratégia de persuasão. Nessa perspectiva, Rowan Garnier nos diz que:

> Na prática, as provas matemáticas nem sempre estão em conformidade com o ideal de um argumento lógico completamente rigoroso. Talvez, uma descrição melhor, da maioria das provas matemáticas, seja a de um argumento plausível o suficiente para convencer a comunidade matemática da verdade de um teorema em particular. Seja considerando uma prova matemática como completamente rigorosa ou simplesmente como um argumento com poder de persuasão suficiente para convencer os especialistas, é possível detectar técnicas e métodos padrão que são empregados (1996, p. 13-14).

Seja a prova por dedução (considerada a mais nobre) ou a prova por indução – bem como a por contradição e a prova por computador –, o tom do discurso que se refere à prova costuma não variar. A seguinte afirmação, por exemplo, pode ser encontrada no prefácio da coletânea de artigos técnicos, intitulada *The Nature of Mathematical Proof*, assinado por Alan Bundy: "A prova matemática é uma das maiores realizações intelectuais da humanidade. Ela carrega os argumentos mais profundos, mais complexos e mais rigorosos que somos capazes de construir" (BUNDY *et al.,* 2005). Um livro de divulgação científica chega a defender a posição de que a alegria de se chegar ao fim de uma prova se compara a uma espécie de êxtase místico-religioso, como é o caso de Donald Benson, que é de opinião que "todos os matemáticos experimentaram, com grande prazer, inúmeras epifanias matemáticas. Na verdade, sem o prazer dessas experiências, a maioria nunca se tornaria um matemático" (BENSON, 1999, p. 1). No entanto, quando se examina o papel e a natureza da prova, com o devido rigor, constata-se que as coisas não se dão de maneira tão tranquila como a apologética do conhecimento matemático quer fazer crer. Um dos temas mais controversos reside no debate que apresenta argumentos que dariam abrigo, na matemática, a atividades em que provas podem ser admitidas por outros meios, como o da autoridade confiável, por exemplo. Essa posição teórica (que aqui se enquadra na epistemologia social), longe de fazer defesa de qualquer expressão de ceticismo, pretende apenas auxiliar na construção de um quadro que forneça mais subsídios para a compreensão da natureza da matemática, através de considerações sobre a prova. Nesse sentido, a epistemologia social se encontra de acordo com a seguinte afirmação de Fernando Gouvêa: "Uma prova não é uma prova até que algum leitor, de preferência um competente, diz que ela o é. Até então podemos ver, mas não devemos acreditar." (GOUVÊA, 2011, p. 208).

Uma crença que aparentemente dispensa justificação, presente com ubiquidade em sutis variações, na divulgação científica (LUNGARZO, 1990; MACHADO, 2005; TOMEI, 2006; COUTINHO, 1989; JANOS, 2009; PAENZA, 2009; STEWART, 2013), é: "O conhecimento matemático é amplamente utilizado no cotidiano". De forma mais imediata, quando se afirma isso, parece querer-se fazer menção apenas a operações intuitivas, tais como *somar* ou *contar*. Nesse sentido, seria tarefa não muito árdua, tomar exemplos de atividades realizadas no dia a dia, nas quais há assiduidade de conhecimentos matemáticos embutidos, não explicitados, mas que passam ao largo da *prova*. No entanto, é possível ampliar a esfera da ausência de provas na atividade matemática.

Para além de situações mais básicas, as quais o conhecimento matemático parece estar impregnado na mentalidade humana, é possível se problematizar a prova da seguinte maneira: ela, a prova, se mostra supérflua, mesmo onde há utilização sistemática e contínua da matemática (por exemplo, entre cientistas e tecnólogos). Para dar assentimento a essa asserção, é necessário que se tenha em mente o papel da prova em áreas que fazem uso do cálculo diferencial e integral, da análise vetorial ou do cálculo numérico, como ferramentas indispensáveis. Se ela não é o núcleo de certas atividades matemáticas, qual seria o conceito epistêmico que entraria em seu lugar? O esboço de uma solução para esse problema coloca a exigência de se examinar crenças justificadas como resultados de um processo confiável de formação de crença. Há que se lançar mão de um modelo epistemológico externalista, que seja eficaz na análise da maneira com que a crença se formou e que avente a possibilidade de que "às vezes, o que os outros nos dizem é importante como corroboração do que já descobrimos (ou pensamos que descobrimos) por nós mesmos" (COADY, 1992, p. 11).

Enfim, trata-se de levar em consideração situações em que aqueles que operam o conhecimento matemático deveriam ser capazes, segundo Hardy (2000, p. 87), de "acompanhar não só os enunciados, mas também as provas", mas que esse não é o caso. A problematização que aqui se expõe, procura colocar em exame a seguinte perplexidade: se a prova caracteriza o conhecimento matemático, se ela é a língua franca desse campo de saber, o que dizer das situações em que a matemática se faz necessária, mas a prova parece se mostrar dispensável? Em casos assim, não estaríamos diante de conhecimento matemático ou será que a prova está presente de "outra" forma?

Num livro em que pretende fornecer argumentos que viabilizem a defesa de uma visão do conhecimento matemático, que ponha em equilíbrio elementos empíricos/contingentes (dimensões sociais e históricas) e normativos/necessários (aspectos epistemológicos), Michael Otte, ressalta o papel da prova da seguinte forma:

> O conhecimento se move, portanto, em dois planos de tipos fundamentalmente diferentes, que aqui indicamos pelos conceitos "intuição" ou experiência e comunicação. Os dois devem absolutamente ser distinguidos, mas, ao mesmo tempo, são indissociáveis. Consideremos a prova como representante do lado comunicativo da matemática. Uma prova matemática deve concordar com a prova da sua própria correção; do contrário se dá uma regressão infinita (...). Esta exigência pode converter a prova numa cadeia de transformações tautológicas mecânicas. Mas a prova matemática não serve apenas, nem sequer em primeiro lugar, à fundamentação do saber, mas ao seu desenvolvimento. A prova deve nos proporcionar conhecimentos que ainda não nos são familiares. A prova nos proporciona o que até agora era desconhecido. Mas se uma prova consiste apenas numa cadeia de transformações tautológicas, então o novo é reduzido ao antigo. O novo do conhecimento é de certo modo explicado até não existir mais, e não é claro como, dessa maneira, novos conhecimentos podem surgir na pessoa a quem a prova se dirige. Uma prova só pode ser compreendida por aquele que já acumulou a experiência suficiente para que, sozinho, pudesse ter encontrado a prova (1993, p. 24).

Portanto, Otte se orienta por uma concepção epistemológica individualista, ao tratar da prova. Isso não o impede de, mais à frente em seu texto, admitir que "todo saber novo, deve ser relacionado com o sistema dos conhecimentos e informações já presentes (...) Ter experiências, ganhar conhecimento, resolver problemas, requer o quadro de uma perspectiva, dentro da qual tudo isso se possa realizar." Enfim, mesmo para uma visão epistemológica *standard*, não há razão para controvérsia em relação ao fato de que a avaliação epistêmica tenha algum cunho social. Mas isso não obriga o autor acima mencionado a firmar um compromisso mais forte com a concepção de que as condições que viabilizam o conhecimento sejam sociais em si mesmas. Este artigo pretende ir um pouco mais além e aponta uma estratégia (a partir da epistemologia do testemunho) para argumentar em favor da ideia de que condições sociais atuam na construção de crenças. No aspecto específico da prova, esta reflexão pretende encaminhar uma solução que a encare como um objeto composto pela lógica e pela retórica do testemunho. Isso, sem que haja prejuízo para a certeza no conhecimento matemático.

3. Aplicando o argumento de Moore na compreensão do testemunho

A prova é o meio mais eficaz para viabilizar a intersubjetividade entre matemáticos. Aparentemente, esse é um consenso estabelecido intuitivamente. Mas, para que esse aspecto do conhecimento matemático não saia da esfera dos problemas para a dos mistérios, precisa ser bem formulado. Este trabalho busca dar uma certa clareza para ele, a partir da análise das condições da prova de existência do mundo exterior que Moore apresentou. As condições para aceitação de uma prova, tal como dito pelo filósofo britânico, são:

> Mas provei agora que duas mãos humanas estavam então em existência? Eu quero insistir que sim; que a prova que dei foi perfeitamente rigorosa; e que talvez seja impossível dar uma prova melhor ou mais rigorosa de qualquer outra coisa. Claro, não teria sido uma prova, a menos que três das condições se fizessem satisfeitas; (1) a menos que a premissa que eu apresentei como prova da conclusão fosse diferente da conclusão para a qual aduzi como prova; (2) a menos que a premissa que eu aduzi fosse algo que eu sabia ser o caso, e não meramente algo que eu acreditava, mas que não era de forma alguma certa, ou algo que, embora de fato verdadeiro, não sabia que assim era; e (3), a menos que a conclusão realmente derivou da premissa. Mas a minha prova satisfez realmente essas três condições (MOORE, 2013, p. 146).

O esquema do argumento de Moore, para provar a existência de um mundo exterior, pode auxiliar na extensão da compreensão filosófica da natureza de uma prova em geral. Como ele mesmo o atesta quando diz que "talvez seja impossível dar uma prova melhor ou mais rigorosa de qualquer outra coisa". Portanto, aqui extraíram-se as condições que Moore aponta, para fornecer mais um subsídio para sustentar a posição central da prova na matemática. No entanto, este trabalho, encara a prova como formada parcialmente pelo testemunho, o qual é o elemento central da epistemologia social. Ou seja, o problema que este artigo trata é justamente de um protocolo que a prova deve seguir, para continuar sendo onipresente em quaisquer atividades matemáticas. Nesse sentido, é verossímil que uma caracterização da prova, mesclando-a com o elemento do testemunho, pode fornecer uma nova visão para a matemática.

Em Sosa (2013), encontra-se uma discussão detalhada do argumento de Moore. O epistemólogo americano, em seu texto, coloca em evidência como funciona o *argumento da mão*, que Moore utiliza para refutar o idealismo (e aqui, para nós, não importa sua eficácia para desarmar o *idealismo antrópico* ou o *idealismo subjetivo*). Para o propósito deste trabalho, basta analisar as três condições que o filósofo britânico considera necessárias para que um argumento se eleve ao *status* de prova. São elas:

1. As premissas precisam ser diferentes da conclusão;
2. A conclusão deriva logicamente das premissas;
3. O proponente do argumento sabe que as suas premissas são verdadeiras.

A primeira condição é fácil de verificar, apenas pela avaliação dos enunciados presentes no argumento. A segunda é mais problemática, pois é o ponto central da lógica, ou seja, a consequência lógica. Mas, pode-se admitir que a prodigalidade de trabalhos sobre esse tema garante certa segurança para avaliar essa condição. A terceira condição é a que parece ser mais espinhosa de se analisar e é justamente a que interessa para a análise que aqui está presente. Afinal, obter certeza de que as premissas sejam verdadeiras, levaria a discussão para um terreno estranho à lógica ou a uma regressão ao infinito. É justamente nessa condição que encontra-se algum papel relevante para o testemunho confiável, no território da matemática. Explicitamente, para Moore, exigir que a própria premissa seja provada é inaceitável, mas aqui não se leva em consideração essa sua restrição, pois a epistemologia social se agrupa entre os diversos modos de fundacionalismo.

Um problema básico que a terceira condição coloca, e que suscita objeção da epistemologia tradicional da matemática, é que devemos recorrer, em grande parte, à linguagem natural para atestarmos a veracidade das premissas em jogo. A consequência disso seria a circularidade, já que a linguagem natural não possui um "ponto de partida". Tendo sido construída ao longo da história, pela experiência das sociedades em estabelecer comunicação, é razoável que não exista uma *linearidade* nas expressões de línguas como português, inglês ou espanhol. Ou seja, não é possível decidir quais palavras são, do ponto de vista linguístico, *primitivas, iniciais* ou *básicas*, e quais são derivadas. Isso se dá, mesmo que, às vezes, constate-se uma complexidade maior em algumas palavras que em outras. Assim, é usual dizer que 'atencioso' é um derivado de 'atenção', e que 'atenciosamente' pode ser um derivado de qualquer um de ambos. Dificilmente se pensaria que primeiro foi concebido o termo 'atenciosamente' e só depois 'atenção'. No entanto, estas considerações são muito precárias. Não em todos os casos pode-se afirmar que uma expressão foi *derivada* de outra. Aliás, "derivado" está quase sempre entendido num sentido histórico: primeiro existiu a palavra "mesa" e, depois, por influência dela, "mesário". Mas não há um critério próprio da linguagem para estabelecer essa derivação. Nessa linha ainda, o epistemólogo tradicional faria observar a diferença com a linguagem da matemática, que, apesar de ser parte da linguagem natural, está enriquecida de componentes formais.

Por exemplo, ao optar-se por escrever os conceitos da geometria plana em português, tem-se, entre eles, o de triângulo: *Dados três pontos não alinhados*, **P, P'** e **P"**, *consideremos os ângulos com vértice em cada um deles cujos lados contêm os outros*. [Por exemplo, o ângulo com vértice em **P**, cujos lados passam por **P'** e **P"**]. *Então, o triângulo* **P_P'_P"** *é a interseção dos três ângulos*.

Para formular esta definição, deve-se supor que já se tem conhecimento do que é *ângulo*. Mas isso não é problema para uma epistemologia tradicional da matemática, porque, segundo essa posição, no desenvolvimento dedutivo da geometria plana, tal como se conhece desde Euclides, o conceito de ângulo aparece "antes" do que o conceito de triângulo. Ainda segundo esse ponto de vista, esta ordem não é histórica. É uma ordem *interna* da própria matemática. Poder-se-ia dizer que é uma ordem lógica ou matemática. O fato de escrever a geometria na linguagem natural não seria um entrave a esta organização dedutiva, porque mesmo que seja construída com os recursos dessa linguagem, no entanto, possui elementos próprios. Por exemplo, os axiomas da teoria, os teoremas e os conceitos definidos, estão delimitados dentro de um campo específico (o geométrico). *São* axiomas ou teoremas da geometria e *não da* língua portuguesa. E mesmo que se leia essa geometria em inglês, tampouco serão axiomas ou teoremas da língua inglesa. São *próprios* da geometria, qualquer que seja a linguagem hospedeira.

Ora, a maior parte das expressões que são usadas na linguagem natural não está inserida claramente numa teoria. Se quisermos definir "tela", não se pode confiar em que exista uma definição rigorosa dada numa teoria sobre tecidos ou sobre televisores (dependendo do significado). A maneira comum de saber o que significa "tela" é procurar no dicionário. Caso procure-se no dicionário cada uma das palavras que definem "tela", e se faz-se esse procedimento de maneira indefinida, acaba-se encontrando o que se queria definir. Ou seja, nessa visão, as definições nas linguagens naturais são *círculos viciosos.*

É claro que isso isto não é um *defeito* da linguagem. Quando se aprende uma língua materna, não há que se submeter a uma ordem específica. Geralmente, vai-se apreendendo palavras à medida que seu uso é requerido pela atividade do falante. Os significados não derivam um de outro logicamente: são compreendidos, na maioria dos casos, pela interação com os objetos.

Quando quer-se estudar especificamente as propriedades dedutivas de uma teoria, seja geometria, aritmética, física teórica e algumas poucas outras que possuem uma configuração lógica madura, precisar-se-ia de uma ordem. Porque não apenas se quer entender o significado, já que o significado pode, muitas vezes, ser capturado também da linguagem natural. O que se faz necessária é uma ordem para *demonstrar* ou *justificar* certos procedimentos. E essa ordem deve ser dada por *regras*.

Não se pode negar que essa argumentação não seja plausível. No entanto, aqui pugna-se para procurar uma posição que encerre essa perspectiva e a do testemunho. Sendo assim, este trabalho defende que a justificação das premissas passa por alguma forma de emprego do testemunho confiável. Somente assim, não se cairia na circularidade que a linguagem natural parece impor. Por meio do acordo entre autoridades confiáveis, poder-se-ia não apenas justificar a veracidade das premissas empregadas, mas também haveria como saber da veracidade delas. Desse modo, o trato lógico não se encontra prejudicado, mas, de forma distinta, enriquecido.

4. Epistemologia social e conhecimento matemático

O interesse de estirpe filosófica pelo conhecimento matemático não é raro. Ele surge no seio da própria atividade profissional dos matemáticos (nessa seara pode-se identificar desde Descartes até Hilbert) e das perplexidades dos filósofos diante das questões que a matemática suscita (nesse rol, encontramos tanto Berkeley quanto Deleuze). As pesquisas, portanto, são de interesse e enfoque variado e vão da ontologia até a lógica dos conceitos, objetos e métodos matemáticos e se organizam, geralmente, da seguinte forma: 1) Qual é o *status* ontológico dos objetos matemáticos?; 2) Como deve ser entendido um sistema matemático: como um sistema construtivo formalizável, como um sistema formal abstrato, manipulado por regras algorítmicas, como um sistema axiomático interpretado?; 3) Como justificar a validade seja de uma prova, seja de uma teoria? E assim por diante[7].

Os debates mais interessantes, sem sombra de dúvida, se enquadram na epistemologia da matemática. Este trabalho se agrupa entre eles. Nesse sentido, aqui defende-se a ideia de que a tarefa filosófica mais instigante se encontra nos esforços envidados para buscar a verdade, fornecendo evidências ou justificação para que uma dada afirmação se torne plausível. Portanto, este empreendimento teórico se alinha com aqueles que afirmam que "o filósofo desinteressado por epistemologia se encontra numa posição bastante precária" (FUMERTON, 2014, p. 15).

O princípio norteador deste texto está ancorado na ideia de que a busca pela verdade, não se cinge aos indivíduos e é incrementada pelas condições e relações sociais para alcançá-la. Neste ponto, embora este esforço reflexivo transite pela epistemologia, ele se afasta de uma abordagem tradicional ou individualista, que tem marcado essa área da filosofia. Leva-se em consideração, na construção deste texto, o que Alvin Goldman diz:

> O interesse pela verdade – ou "conhecimento", como eu o tenho chamado, usando este termo em sentido fraco – não está confinado a indivíduos. Muitas instituições sociais também têm um interesse no conhecimento. A Ciência busca descobrir novo conhecimento; a lei busca a verdade sobre quem violou um dado estatuto, ou quem cometeu um delito, de modo que a justiça possa ser feita (2001, p. 58).

Sendo assim, a opção que se fez pela epistemologia social[8] como ferramenta para entender o conhecimento matemático está longe do mero capricho. Do ponto de vista que aqui defende-se, não há razões para admitir que o conhecimento matemático seja refratário às relações, interesses, papéis

[7] Para uma discussão mais detalhada de como as questões de filosofia da matemática podem ser tratadas, cf. ROCHA, 2014.
[8] Daqui para frente ES.

e instituições sociais. Desse modo, uma compreensão integral da matemática deve ter em conta a atuação de condições sociais nas suas próprias condições conceituais e normativas[9].

Essa nova vertente da epistemologia também se mostrou adequado ao propósito deste trabalho, na medida em que ela já nasce com a vocação interdisciplinar. Essa perspectiva de "transferência de métodos de uma disciplina para outra" (NICOLESCU, 2005, p. 52), acaba por trazer uma revitalização para a filosofia. Ao atentar-se para as questões que orientam a ES, não resta dúvida de que ali se põe a demanda de interdisciplinaridade, pois se faz menção a conceitos e métodos que são francamente de outras disciplinas: *cognição, condições sociais, ambiente social, circunstâncias sociais, instituições sociais*. A ES não seria possível, como atividade filosófica, sem que se servisse de pesquisas que fogem ao território delimitado classicamente pela própria filosofia. Isso não implica naturalização da epistemologia. Aliás, esse debate não é objeto de discussão deste trabalho.

Além do mais, há mais de quatro décadas, em seu pioneiro trabalho aqui no Brasil sobre interdisciplinaridade, Hilton Japiassu alertava que:

> Chegou o momento de uma nova epistemologia, que não seria mais somente uma reflexão sobre cada ciência em particular, separada do resto, e comprazendo-se com uma deleitação morosa sobre seu próprio discurso. Invertendo a marcha do pensamento, os sábios de nossa época devem renunciar a se confinarem em sua especialidade, para procurarem, em comum, a restauração das significações humanas do conhecimento (1976, p. 15).

A epistemologia social é uma área muito recente, e em expansão, da epistemologia[10]. É uma abordagem filosófica do conhecimento que se caracteriza pela investigação conceitual e normativa das dimensões sociais do conheci-

---

[9] A coletânea intitulada *Mathematical Events of the Twentieth Century*, é muito interessante nesse aspecto. Os ensaios que ali aparecem, nos levam a crer que o desenvolvimento de teorias matemáticas depende de um quadro histórico, social e psicológico. Apenas a dimensão lógica seria insuficiente para entender as razões que levaram aqueles matemáticos russos a se dedicarem aos problemas por eles descritos e não a outros. As relações sociais e instituições se encontram claramente conectadas com os desenvolvimentos conceituais da matemática.

[10] O volume 73 de *Synthese*, publicado em 1987, é considerado o nascimento "formal" da epistemologia social. Na série de artigos ali publicados, temos o delineamento do programa dessa vertente epistemológica, que vem se desenvolvendo com detalhe desde então.

mento. Como nos diz Frederick Schmitt: "Ela estuda a relevância de relações, interesses, papéis e instituições sociais (...) nas condições conceituais e normativas do conhecimento" (2008, p. 547). Esse modelo epistemológico se propõe, ainda, a entender de que forma se estrutura a busca pelo conhecimento. Para tal, ele não deixa de considerar que normalmente o conhecimento é perseguido por variados indivíduos, que operam em uma área de saber mais ou menos bem definida e cada um deles é equipado com as mesmas capacidades cognitivas imperfeitas. Ela ainda não deixa de notar que há diferentes graus de interação, no que concerne às atividades cognitivas uns dos outros. O epistemológo social, também tem por meta, obter sucesso ao mostrar como os produtos de nossas atividades cognitivas são afetados por eventuais mudanças das relações sociais nas quais os produtores do conhecimento se acham envolvidos. Na visão de Fuller,

> O epistemólogo social seria o ideal organizador da política epistêmica: se um certo tipo de produto de conhecimento for desejado, então ele poderia conceber um esquema para dividir o trabalho que precisa ser realizado da maneira mais provável (ou eficiente); ou, se a sociedade já está comprometida com um certo esquema para dividir o trabalho cognitivo, o epistemólogo social poderia então indicar os produtos de conhecimento que mais provavelmente funcionassem nesse sistema (1988, p. 3).

Geralmente, a ES se concentra em três pontos: a) papel das condições sociais no conhecimento do indivíduo; b) organização social do trabalho cognitivo; c) a natureza do conhecimento coletivo. Embora os três pontos destacados sejam de suma importância para a composição de um painel completo da ES, o primeiro ponto é aquele que é relevante neste estudo. É nele que se reúnem os debates em torno do *testemunho* no conhecimento e na justificação. Mais adiante, esse conceito será tratado, já que ele conduz a abordagem que se faz aqui do conhecimento matemático. Por ora, declinam-se ainda mais alguns traços característicos da ES.

De forma alguma, pode-se confundi-la com a sociologia do conhecimento, mesmo nas vertentes mais "normativas" desta última, na medida em que não é uma abordagem empírica do conhecimento. De índole filosófica, portanto preocupada com o necessário e conceitual, a ES tem se ocupado de tópicos tais como: a) testemunho; b) desacordo; c) relativismo epistêmico; d) abordagens epistêmicas para a democracia, entre outros. Seria precoce dizer que já se delimitaram definitivamente todos os tópicos de interesse da ES. Pode-se, ainda, caracterizar essa abordagem epistemológica, confrontando-a com a epistemologia tradicional, por meio de uma questão bem definida, ausente nos programas epistemológicos *standard*: "O conhecimento é uma propriedade de conhecedores desligados de seu ambiente social (e em qual sentido de ´isolamento´) ou envolve uma relação entre os conhecedores e suas circunstâncias sociais?" (SCHIMITT, 2008, p. 548).

Se a ES não chega a romper completamente com a epistemologia tradicional, ao estabelecer algumas novas bases para seu estudo, ao menos amplia e transforma o campo antigo. Os elementos que se incorporam à epistemologia, tais como a organização do conhecimento e de seus veículos institucionais, consenso, localidade de pesquisa, conhecimento tácito, autoridade, e assim por diante, abrem possibilidades não antevistas anteriormente. Apenas isso já é instigante o bastante para quem é realmente um epistemólogo e está em busca de problemas relevantes e novos para abordar.

O modo consagrado das investigações epistemológicas procura por princípios que possam ser utilizados na escolha de atitudes doxásticas, segundo distintas condições de prova. A epistemologia tradicional se ocupa com normas epistêmicas para a escolha doxástica. Além do problema das escolhas doxásticas, a ES interessa-se por a) opções que autorizem o que podemos afirmar, b) opções de como *procurar* por provas, e c) escolhas entre *instituições*, dos sistemas sociais que contribuam para os resultados epistêmicos.

A epistemologia tradicional emprega a terminologia de "fontes" epistêmicas, para se referir a elementos tais como percepção, memória, raciocínio e introspecção. Tais fontes podem ser de *conhecimento*, *justificação* ou *provas*. Neste artigo, a fonte epistêmica que interessa é a de provas. Aqui, no que diz respeito à matemática, pretende-se delinear uma abordagem que trate o testemunho como uma fonte probatória usualmente desconsiderada por esse tipo de conhecimento. Portanto, dá-se destaque para as asserções que se ouve (ou se lê) de outras pessoas. Se alguém dá testemunho da verdade de *p*, um ouvinte adquire uma nova fonte de prova para *p*. Determinar quais são as circunstâncias legítimas em que o testemunho é capaz de fornecer provas é uma questão que serve, num nível mais profundo, para sustentar toda a epistemologia social. Pode-se afirmar que a negligência do testemunho como fonte epistêmica mantém a epistemologia no seu trilho tradicional. A presença do testemunho em áreas tais como a história, direito e antropologia é já consagrada. Neste trabalho procura-se dar maior sustentação para o que Coady defende, no capítulo 14, de seu *Testimony: A Philosophical Study*, quando aplica o testemunho à matemática.

O trabalho de Cecil Coady, ao inserir o testemunho na avaliação epistêmica da matemática, coloca em cena um incômodo condicional: se o testemunho de uma autoridade confiável não fosse verdadeiro, o agente epistêmico não acreditaria nele[11]. Neste ponto, verifica-se que o testemunho introduz na filosofia aspectos tais como cognição, fato social, dados históricos e antropológicos, que precisam ser analisados em sua dimensão necessária e normativa. Uma nova demanda se coloca, então. Ao inserir o que não é propriamente de índole matemática, para avaliar epistemicamente a própria matemática, tem-se no mínimo uma perplexidade, como atesta-se na seguinte passagem:

> As relações entre verdade matemática e intelecto humano levantam problemas tão desconcertantes e complexos quanto os da filosofia. A maioria deles tem sido tão abundantemente debatida e discutida que não há necessidade de lembrá-los aqui. Mas há um problema que raramente é mencionado e, ainda menos frequentemente, discutido com detalhe. Trata-se do *status* de crenças matematicamente verdadeiras que possuem fundamentos confiáveis não matemáticas e, especialmente, aquelas que tem fundamento em testemunhos confiáveis. Penso que é comum assumir que essas crenças não podem ter o status de conhecimento, mas essa suposição raramente é explicitada e defendida por argumentos. Acredito, contrariamente, que tais crenças podem constituir conhecimento e, no que se segue, tentaremos desarmar a resistência filosófica a essa ideia (COADY, 1992, p. 249).

Neste artigo, ao tentar determinar qual o papel da justificação testemunhal para o conhecimento matemático, foi preciso traçar um esquema das premissas que deveriam sustentar essa nova abordagem epistemológica. O objetivo deste trabalho teria sido alcançado se fosse possível argumentar que em alguns casos, convicções verdadeiras e justificadas podem ser tomadas como conhecimento e não como uma relação casual entre convicções e verdades. Sendo assim, são apontadas algumas fragilidades da argumentação

[11] Esse condicional é uma paráfrase de outro, encontrado no trabalho de PEREIRA (2015).

da posição tradicional na epistemologia da matemática (a qual denominou-se e^1), quando ela assume que se um agente epistêmico possui uma crença que é baseada (parcial ou totalmente no testemunho), de que uma dada proposição matemática *p* é verdadeira, mas não é capaz de demonstrá-la matematicamente, então não se pode dizer que tal agente epistêmico sabe que *p*. A hipótese com a qual trabalhou-se assume a posição (a qual foi denominada e^2) de que o testemunho está firmemente ancorado no próprio processo de justificação do conhecimento matemático e, é condição necessária para que essa forma de conhecimento seja tomada como legítimo produto da cultura humana. Isso, porque dado que a matemática é fruto da cultura humana, resulta que pode-se apontar a utilização de condições sociais – como é o caso do que se insere quando admite-se o testemunho – para justificar o conhecimento matemático, tanto como ele é utilizado em outras formas de conhecimento.

Para dar encaminhamento a esse argumento, admite-se o chamado socialismo superveniente, para alcançarmos maior compreensão do conhecimento matemático. Sendo assim, a base sobre a qual se construiu esta análise implica reconhecer que as condições de justificação se ancoram em condições sociais.

O método utilizado consistiu, num primeiro momento, na análise da posição daqueles que defendem que algumas crenças justificadas, como as que ocorrem na matemática, não podem ser derivadas de condições sociais e^1. Essa posição se refere a autores tais como: Colyvan (2011), Hadamard (1954), Chisholm (1969), Benson (1999), Hardy (2000) e tantos outros. Num segundo momento, a partir dos resultados obtidos dessa análise, buscou-se na matemática dados que me fornecessem contraexemplo a e^1. As pretensões deste artigo são especialmente exploratórias. Por ser um trabalho de natureza filosófica, ele se orienta pela reflexão de caráter hipotético-dedutiva e comparação de perspectivas das correntes sob análise, para determinar o grau de verossimilitude das conjecturas aqui avançadas.

O ponto em que se concentra o ataque a e^1 pode ser formulado da seguinte maneira: Se o testemunho não é capaz de justificar uma crença, qual o seu papel no processo de conhecimento? Nessa primeira formulação não se tem ainda em mente o conhecimento matemático propriamente dito. No entanto, avançando um pouco mais, faz-se uma aplicação do que se pensa sobre o testemunho em outros campos de saber, à própria matemática. Se o testemunho encontra-se ubiquamente nas mais diversas formas de conhecimento, por qual razão ele não encontraria abrigo na matemática? Nesse sentido, para dar um formato mais organizado para essa discussão é que se tomaram as condições elencadas para uma prova, do argumento de Moore (que foram abordadas na seção anterior).

Num primeiro momento se estabeleceu a discussão em bases mais flexíveis, como exposto a seguir. O testemunho possui tal relação com o conhecimento que nada na esfera deste pode ser concebido sem a sua presença – como conviria a $\boldsymbol{e^2}$. Em áreas como biologia, física ou sociologia isso é autoevidente. Em relação à matemática, pode-se recorrer à história da matemática para justificar essa asserção ou a atividades em que a matemática é utilizada sobejamente.

No que concerne à história da matemática, pode-se relembrar, na história dos números negativos, o caso de George Peacock e seu *Treatise on Algebra*. O esforço do matemático inglês para remover as objeções aos números negativos, não passou apenas pelo critério da lógica, pois ele de fato:

> conseguiu fazer a axiomatização da aritmética que havia escapado aos matemáticos por séculos e ainda estendeu a sua axiomatização para incluir números negativos. Seu trabalho, junto com o dos outros algebristas ingleses (...), desembocou em uma nova apreciação da natureza da axiomatização como uma ciência formal (FOSSA, 2007, p. 56).

No entanto, sua "retórica" não foi bem acolhida à época, o que ocasionou a desconsideração da dimensão propriamente lógica, por parte da comunida matemática. Na verdade, falar sobre números negativos trazia uma carga maior para a prova. Algo que se espraiava para a confiabilidade do testemunho. Portanto, neste caso, por meio da negação de um testemunho específico, conclui-se que o testemunho cumpre papel epistemológico no conhecimento matemático.

No caso das atividades em que a matemática é instrumentalizada, como nas ciências empírico-formais e nas diversas áreas da tecnologia, podemos tomar o singelo exemplo do teorema fundamental do cálculo, quando ensinado para futuros engenheiros. Para esse tipo de futuro profissional, é realmente necessário que ele entenda a prova que formaliza o teorema ou basta que o apreenda intuitivamente? Na segunda opção, não resta dúvida de que muito da tarefa se fundará em testemunho confiável.

Tanto num caso como no outro, há que se admitir que não se começa a cada vez que se faz matemática, sem um conhecimento histórico mínimo (isso pode ser denominado de testemunho) do que já resta provado.

Tome-se agora a seguinte disjunção: o testemunho é parte integrante de toda forma de conhecimento (inclusive a matemática) ou apenas de algumas formas especiais, nas quais ele encontra abrigo. Ao se esquadrinhar os mais diversos campos de saber, observa-se que ele não se encontra apenas em algumas formas de conhecimento. A matemática não foge a tal regra, como o prova a sua própria história. E se ela fugisse, não seria propriamente conhecimento. Portanto, o testemunho se faz presente em qualquer tipo de conhecimento, inclusive na matemática. Desse modo, $\boldsymbol{e^2}$ se consolida como a opção epistemológica mais sólida.

Até este ponto, tem-se que admitir que o conhecimento não deve ser concebido sem a presença do testemunho. Portanto, a matemática não pode existir como conhecimento sem que o testemunho seja-lhe uma de suas formas autênticas de justificação. Resta admitir que o conhecimento matemático também se viabiliza, ao menos parcialmente, sem que seja necessária a compreensão de uma prova.

Há fartas razões para tomar o testemunho como um dos elementos constituidores de crenças justificadas na medida em que não é possível a um indivíduo, isoladamente, conhecer tudo. Portanto, sempre haverá a necessidade de se recorrer ao testemunho, em algum nível de justificação, para algumas crenças sobre aquilo que não nos é acessível dedutivamente. São várias as razões para isso. Como encontra-se em outro trabalho:

> (...) como um leigo pode ter uma crença justificada sobre uma área abstrusa como a Cosmologia Científica ou sobre a resolução da Hipótese de Poincaré? Certamente haverá a necessidade de que se recorra ao testemunho do especialista para que tenhamos algum grau de justificação racional sobre tópicos que simplesmente não podemos ter conhecimento individual seguro (ROCHA, 2013, p. 7).

E esse recurso à autoridade, não se enquadra na tipologia de falácias *ad verecundiam*. Aqui se está sublinhando o papel fundamental do testemunho da autoridade epistemologicamente confiável, com o intuito de se defender a posição de que o conhecimento matemático e as certezas que ele engendra, não se fundam exclusivamente nos esquemas da tradicional prova dedutiva. É plausível retirar certezas matemáticas de testemunhos. A postura tradicional diria que o testemunho apenas forneceria dúvidas, na medida em que apenas fortuitamente haveria coincidência entre a convicção de verdade de um agente epistêmico e *p*. No entanto, diante do que se argumentou acima, é necessário que se assevere que o testemunho fornece certezas também e é parte integrante do conhecimento matemático.

Conclusão

Este trabalho, mesmo sendo o resultado parcial de uma pesquisa que ainda se encontra em curso, contém o argumento sobre o qual pode-se desenhar um papel definitivo para o testemunho na construção e compreensão da prova. Pode-se concluir que, aqui se encaminhou a possibilidade de que a compreensão de uma prova passe por elementos que não sejam estritamente os advindos da lógica. Para além do rigor formal, a literatura técnica ou de divulgação sobre a matemática, admite que essa forma de conhecimento não é refratária a condições sociais. Na constituição da prova, o estilo próprio do matemático e os limites do conhecimento que se tem à época são facilmente detectáveis. Elementos que parecem mais distantes, tais como os interesses envolvidos e a articulação entre instituições, parecem começar a ganhar terreno. Em relação ao testemunho, muito há que ser feito, pois o argumento que se delineou aqui precisaria ser testado em muitas outras situações, para verificar se há contraexemplo. No entanto, nesta altura da pesquisa, conseguiu-se alcançar os objetivos mínimos propostos: a) estabelecer um nexo consistente entre epistemologia social e sua eficácia na análise do conhecimento matemático; b) esboçar um argumento plausível e persuasivo, que explicite a necessidade de se incluir o testemunho na análise do conhecimento matemático; c) apresentar uma discussão sobre a natureza da matemática, de cunho normativo e conceitual, que não se enquadra num esquema *standard*, aparentemente desgastado. Tudo isso, não teria sido possível se não houvesse uma motivação que nasceu de um *dicto* do filósofo americano Nelson Goodman: "Recognizing patterns is very much a matter of inventing and imposing them."

Referências

BENSON, D. C. *The Moment of Proof - Mathematical Epiphanies*. Oxford University Press, 1999.

BOLIBRUCH, A. A. OSIPOV, Y. S. & SINAI, Y. G. *Mathematical Events of the Twentieth Century*. Springer-Verlag, 2006.

BUNDY, A. et al. *The Nature of mathematical proof*. Phil. Trans. R. Soc. A (2005) 363, 2331–2333.

CHISHOLM, R. *Teoria do Conhecimento*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

COADY, C. A. J. *Testimony: A Philosophical Study*. Oxford Clarendon Press, 1992.

COLYVAN, M. *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Cambridge, 2011.

COSTA, N. C. A. *Introdução aos fundamentos da matemática*. São Paulo: HUCITEC, 2008.

COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não-euclidianas*. L. Coutinho, 1989.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

FOSSA, J. *Cabelos negros, olhos azuis e outras feições das matemáticas puras e aplicadas*. Natal: EDUFRN, 2007.

FULLER, S. *Social Epistemology*. Indiana University Press, 1988.

FUMERTON, R. *Epistemologia*. Petrópolis: Vozes, 2014.

GÅRDING, L. *Encontro com a matemática*. Brasília: UnB, 1997.

GARNIER, R. *100% Mathematical Proof*. West Sussex: John Wiley & Sons, 1996.

GOLDMAN, A. I. & WHITCOMB, D. (ed.). *Social Epistemology: Essential Readings*. Oxford University Press, 2011.

________. Educação e epistemologia social. *Contrapontos*, Itajaí, ano 1, n. 3, p. 57-70, jul./dez. 2001.

GOUVÊA, F. Q. Was Cantor Surprised? In: *The American Mathematical Monthly*, Washington DC, nº 118, p.198-209, 2011.

GRANGER, G.G. *Filosofia, linguagem e ciência*. Aparecida: Ideias e Letras, 2013.

HADAMARD, J. *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover, 1954.

HARDY, G. H. *Em defesa de um matemático*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HERSH, R. (ed.) *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*. New York: Springer, 2006.

JANOS, M. *Matemática e natureza*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

JAPIASSU, H. *Interdisciplinaridade e patologia do saber*. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

________. *O sonho transdisciplinar e as razões da filosofia*. Rio de Janeiro: Imago, 2006.

KITCHER, P. *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford University Press, 1984.

KRANTZ, S.G. *The Proof is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof*. New York: Springer, 2011.

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LUNGARZO, C. *O que é matemática*. São Paulo: Brasiliense, 1990.

MACHADO, N. J. *Matemática e realidade*. São Paulo: Cortez, 2005.

MANNHEIM, K. *Ideologia e Utopia*. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

MATTÉI, J. F. *Pitágoras e os pitagóricos*. São Paulo: Paulus, 2000.

MOORE, G. E. Proof of an External World. In: MOORE, G. E. *Philosophical Papers*. Routledge, 2013. p. 127-150.

MORASH, R.P. *Bridge to Abstract Mathematics: Mathematical Proof and Structures*. New York: Random House, 1987.

NICKERSON, R.S. *Mathematical reasoning: patterns, problems, conjectures, and proofs*. New York: Psychology Press, 2011.

NICOLESCU, B. *O manifesto da transdisciplinaridade*. São Paulo: Triom, 2005.

OTTE, M. *O formal, o social e o subjetivo*. São Paulo: UNESP, 1993.

PAENZA. *Matemática... cadê você?* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2009.

PEREIRA, R. H. S. Ceticismo e contrafactuais. In: PINHEIRO, U; RUFFINO, M & SMITH, P. J. (Org.). *Ontologia, conhecimento e linguagem*. Rio de Janeiro: Mauad, 2001. p. 205-221.

POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

ROCHA, A. O caso Hardy-Ramanujan: uma abordagem do conhecimento matemático segundo a epistemologia do testemunho. In: *Anais do Scientiarum História VI*. Rio de Janeiro: HCTE/UFRJ, 2013. p.1-8.

__________. O Hardware, o software e uma nova concepção da filosofia da matemática. In: *Anais do Scientiarum História VII*. Rio de Janeiro: HCTE/UFRJ, 2014. p.1-8.

SCHIMITT, F. Epistemologia Social. In: GRECCO, J & SOSA, E. (Ed.) *Compêndio de Epistemologia*. São Paulo: Loyola, 2008. p. 547-591.

SILVA, J. J. *Filosofias da matemática*. São Paulo: UNESP, 2007.

SOSA, E. *Conhecimento reflexivo*. São Paulo: Loyola, 2013.

STEWART, I. *17 equações que mudaram o Mundo*. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

TOMASELLO, M. *The cultural origins of human cognition*. Harvard University Press, 1999.

TOMEI, C. *Euclides: a conquista do espaço*. São Paulo: Odysseus, 2006.

Artigo recebido em 01 de novembro de 2017
e aprovado para publicação em 21 de novembro de 2017

Como citar:

ROCHA, André Campos da. O testemunho como prova e suas relações com o conhecimento, a certeza e a dúvida na matemática. *Coletânea*, Rio de Janeiro, v. 16, n. 32, p. 217-244. jul./dez. 2017. ISSN 1677-7883. Disponível em: <www.revistacoletanea.com.br>.